Διατεταγμένες σχέσεις

Ορισμός: Έστω (E,R) ένα διατεταγμένο σύνολο. Το ζεύγος καλείται:

(i) Κατευθυνόμενο σύνολο: Αν κάθε υποσύνολο του E με δυο στοιχεία είναι άνω φραγμένο

(ii) Πλέγμα / Δίκτυο: Αν καθε υποσυνόλο του E με δυο στοιχεία έχει supremum και infimum

(iii) Ολικά Διατεταγμένο σύνολο: Αν για κάθε ζεύγος $(x,y)\in E$ ισχύει οτι $(x,y)\in R$ ή $(y,x)\in R$

(iv) Επαγωγικά Διατεταγμένο σύνολο: Αν για κάθε υποσύνολο του E το οποίο είναι ολικά διατεταγμένο ισχύει οτι είναι και άνω φραγμένο

(v) Καλά Διατεταγμένο: Αν κάθε μη-κενό υποσύνολο του E έχει ελάχιστο.

Άσκηση 70: Ας είναι V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος F. Ας είναι E το σύνολο όλων των υποχώρων του V. Να δειχθεί ότι $(E, \subseteq)$ είναι πλέγμα (όπου $\subseteq$ η γνωστή διάταξη του υποσυνόλου)

Λύση: Ζητάει να δείξουμε ότι $(E, \subseteq)$ είναι πλέγμα. Άρα αρκεί να βρούμε δυο υποχώρους του V (δηλαδή υποσύνολα του E) ώστε το δισύνολό τους να έχει supremum και infimum. Έστω S, T δυο υπόχωροι του V. Τότε $S \cap T$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του $\{S, T\}$ ενώ ο υπόχωρος $S+T$ ο οποίος παράγεται από το $S \cup T$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\{S, T\}$. Άρα δείξαμε ότι για τυχόν δισύνολο, υποσύνολο του E με τη γνωστή διάταξη ισχύει ότι αυτό έχει supremum και infimum. Άρα, $(E, \subseteq)$ είναι πλέγμα. $\square$

Ασκήση 71: Ας είναι (E,R) πλέγμα και I, J δυο πεπερασμένα σύνολα, (x_{ij}) μια οικογένεια στοιχείων του E με δείκτες $(i,j) \in I \times J$

Να δειχθεί ότι $\left(\sup_{j\in J} \inf_{i\in I} (x_{ij}), \inf_{i\in I} \sup_{j\in J} (x_{ij})\right) \in R$

Λύση: Αρχικά παρατηρούμε ότι για δυο τυχαίους δείκτες i_0 στο I και j_0 στο J ισχύει ότι

$\inf_{i\in I} (x_{ij_0}) \leq x_{i_0 j_0} \leq \sup_{j\in J} x_{i_0 j}$ (1) όπου i_0, j_0 σταθεροποιημένοι δείκτες

Άρα για κάθε δείκτη j_0 στο J το $\inf_{i\in I} (x_{ij_0})$ είναι κάτω φράγμα του $\{\sup_{j\in J} (x_{ij})\}_{i\in I}$. Άρα, το $\inf_{i\in I} (x_{ij_0})$ ως κάτω φράγμα του $\{\sup_{j\in J} (x_{ij})\}_{i\in I}$ θα είναι μικρότερο από το $\inf_{i\in I} \sup_{j\in J} \{x_{ij}\}$

Άρα $\inf_{i\in I} (x_{ij_0}) \leq \inf_{i\in I} \sup_{j\in J} \{x_{ij}\}$ (2). Η σχέση (2) ισχύει για το τυχόν σταθεροποιημένο $j_0 \in J$. Άρα το $\inf_{i\in I} \sup_{j\in J} \{x_{ij}\}$ είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου $\{\inf_{i\in I} (x_{ij})\}_{j\in J}$. Έτσι $\sup_{j\in J} \inf_{i\in I} (x_{ij}) \leq \inf_{i\in I} \sup_{j\in J} (x_{ij})$ $\square$

Άσκηση 73: Ας είναι E ένα σύνολο, S ένα μη-κενό σύνολο από διατάξεις στο E, με S ολικά διατεταγμένο ως προς τη σχέση του υποσυνόλου. Να δειχθεί ότι $\bigcup S$ είναι διάταξη.

Λύση: Για να δείξουμε ότι $\bigcup S$ είναι διάταξη αρκεί να δείξουμε ότι είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

Έστω $x \in E$. Τότε το (x,x) ανήκει σε όλες τις διατάξεις του S. Άρα $(x,x) \in \bigcup S$. Επομένως $\bigcup S$ ανακλαστική. Έστω $(x,y) \in \bigcup S$ & $(y,x) \in \bigcup S$. Άρα $\exists$ διατάξεις R_1, R_2 εν S ώστε $(x,y) \in R_1$ & $(y,x) \in R_2$. Τότε αφού από υπόθεση το S είναι ολικά διατεταγμένο άρα $R_1 \subseteq R_2$ ή $R_2 \subseteq R_1$. Έστω ότι $R_1 \subseteq R_2$. Τότε $(x,y) \in R_1 \Rightarrow (x,y) \in R_2$. Έτσι έχουμε ότι $(x,y) \in R_2 \land (y,x) \in R_2$ και αφού R_2 είναι μια διάταξη άρα $x = y$.

Έτσι δείξαμε ότι αν $(x,y) \in \bigcup S \land (y,x) \in \bigcup S$ τότε αναγκαστικά $x = y$. Άρα $\bigcup S$ αντισυμμετρική.

(Αν δουλεύαμε για $R_2 \subseteq R_1$ θα καταλήγαμε στο ίδιο αφού, $(y,x) \in R_2 \xrightarrow{R_2 \subseteq R_1} (y,x) \in R_1$. Επίσης $(x,y) \in R_1$. Όμως R_1 διάταξη άρα $(y,x) \in R_1 \land (x,y) \in R_1 \Rightarrow x = y$).

Έστω $(x,y) \in \cup S$ και $(y,z) \in \cup S$. Άρα υπάρχουν διατάξεις R_1 και R_2 εν S ώστε $(x,y) \in R_1 \wedge (y,z) \in R_2$.
Όμοια αφού S ολικά διατεταγμένο άρα $R_1 \subseteq R_2$ ή $R_2 \subseteq R_1$.
Αν $R_1 \subseteq R_2$. Τότε $(x,y) \in R_1 \Rightarrow (x,y) \in R_2 \wedge (y,z) \in R_2$. (1)
Η R_2 όμως είναι διάταξη άρα είναι μεταβατική επομένως η (1) $\Rightarrow (x,z) \in R_2$. Άρα $(x,z) \in \cup S$.
Άρα $\cup S$ μεταβατική. Όμοια αν $R_2 \subseteq R_1$ τότε
$(y,z) \in R_2 \Longrightarrow (y,z) \in R_1 \wedge (x,y) \in R_1$ ή

καλύτερα $(x,y) \in R_1 \wedge (y,z) \in R_1 \xRightarrow[\text{άρα μεταβατική}]{R_1 \text{ διάταξη}} (x,z) \in R_1$

$\Rightarrow (x,z) \in \cup S \Rightarrow \cup S$ μεταβατική και σ' αυτή την περίπτωση. Άρα σε κάθε περίπτωση η $\cup S$ είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική
Άρα $\cup S$ είναι μια διάταξη. $\square$

Ορισμός: Ας είναι (E,R) και (E',R') δυο διατεταγμένα σύνολα και φ μια απεικόνιση με $\varphi: E \to E'$ τότε η φ ονομάζεται: (i) ισομορφισμός αν είναι 1-1 και επί και επιπλέον: $(x,y) \in R \Leftrightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in R'$
(ii) Αύξουσα αν για κάθε $x,y \in E$ με $(x,y) \in R$
$\Rightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in R'$

(iii) φθίνουσα αν για κάθε x, y εν E με $(x,y) \in R$ $\Rightarrow (\varphi(y), \varphi(x)) \in R'$

(iv) Μονότονη αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα

(v) Γνήσια αύξουσα αν για όλα τα x, y εν E τέτοια ώστε $x \neq y$ και $(x,y) \in R \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$ και $(\varphi(x), \varphi(y)) \in R'$

(vi) Γνήσια φθίνουσα αν για όλα τα x, y εν E τέτοια ώστε $x \neq y$ και $(x,y) \in R \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$ και $(\varphi(y), \varphi(x)) \in R'$

Σχέσεις Καλής Διάταξης

Θεώρημα: κάθε σχέση καλής διάταξης σε μια κλάση X είναι και ολική διάταξη στην κλάση X

Ορισμός: Έστω R μια διάταξη στην κλάση X και έστω S υποκλάση της X. Η S καλείται R-τμήμα της X αν $(\forall s \in S)$ και $(\forall x \in X)$ τέτοια ώστε $(x, s) \in R \Rightarrow x \in S$

Ορισμός: Έστω a τυχόν στοιχείο της X. Το σύνολο $S_{X,R}^{(a)} = \{x \in X : x \leq_R a\}$ ονομάζεται αρχικό τμήμα του a.

Ορισμός: Ονομάζουμε γνήσιο R-τμήμα της κλάσης X και R-τμήμα ώστε να είναι γνήσιο υποσύνολο του X.

Θεώρημα: Έστω R μια καλή διάταξη σε μια κλάση X τότε κάθε γνήσιο R-τμήμα είναι και αρχικό

Άσκηση 80: Έστω R μια καλή διάταξη σ' ένα σύνολο E. Να δειχθεί ότι το σύνολο των R-τμημάτων του E είναι καλά διατεταγμένο ως προς τη σχέση του υποσυνόλου.

Λύση: Έστω A το σύνολο των R-τμημάτων του E

Ας είναι A^* το σύνολο των πρωταρχικών R-τμημάτων

Αρκεί να δείξουμε ότι το A^* είναι καλά διατεταγμένο

Έστω $B \neq \emptyset$ με $B \subseteq A^*$. Έστω $T = \{x : S_{E,R}^{(x)} \in B\}$

Τότε αφού κάθε R-τμήμα που ανήκει στο A^* είναι πρωταρχικό άρα $T \neq \emptyset$. Άρα ως μη-κενό έχει ελάχιστο στοιχείο (R-ελάχιστο στοιχείο). Έστω t_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του T.

Ισχυρισμός: Το $S_{E,R}^{(t_0)}$ είναι το ελάχιστο R-στοιχείο του T. Πράγματι, έστω $S_{E,R}^{(x)}$ ένα στοιχείο του B τότε $x \in T \Rightarrow t_0 \underset{R}{\leq} x \Rightarrow S_{E,R}^{(t_0)} \subseteq S_{E,R}^{(x)}$. Άρα το T έχει ελάχιστο στοιχείο άρα είναι καλά διατεταγμένο □